

## 对三部偏 W 态纠缠的多方连续检测

徐璐琳

(北京邮电大学理学院, 北京 100876)

**摘要:** 由于在实验室中制备多部纠缠态存在困难, 对于现存多部纠缠态, 研究在几次局部测量后还能保持态的部分纠缠是很关键的。本文解决了这个问题, 验证了由 Alice、Bob 和多个 Charlie 共享的三部偏 W 态纠缠的连续检测。为了检测纠缠, 使用见证算子。利用纠缠见证算子, 验证最多 3 个 Charlie 和一个 Alice, 一个 Bob 的纠缠。

**关键词:** 偏 W 态; 纠缠; 见证算子

中图分类号: J905

文献标识码: A

文章编号: 1004-7344(2021)08-0267-03

## 0 引言

纠缠是量子力学的非经典特征之一, 在量子力学中占重要的地位, 因此检测纠缠是有必要的。见证算子是检测纠缠的工具。在进行测量后, 纠缠态将失去纠缠。由于制备多部纠缠态比较困难, 因此有必要探讨经过几次局部测量后仍能保持部分纠缠的问题。为了解决这一问题, 采用了介于投影测量和弱测量<sup>[1]</sup>之间的非锐度测量<sup>[2]</sup>。投影测量是以对系统的最大干扰为代价获得最大的信息。与此同时, 纠缠态将塌缩为观测值的特征态之一, 从而失去纠缠。而弱测量对系统的干扰无穷小且只提供少量的信息。非锐度测量提供了一种信息获得和干扰的平衡。换句话说, 在获得足够的信息并保留部分纠缠态的情况下, 执行非锐度测量可以解决连续纠缠检测的问题。

当态的纠缠可以被连续检测时, 问题就变成有多少观察者可以检测到纠缠。利用见证算子连续检测纠缠最初是在三部纠缠态中研究的。Maity 等人<sup>[3]</sup>研究了通过多个连续观察者来检测真正的三方纠缠的可能性。他们利用见证算子对三部 W 态和三部 GHZ 态进行连续检测。结果表明, W 态和 GHZ 态的纠缠最多有 4 个 Charlie 和 12 个 Charlie 可以连续检测。

## 1 预备知识

在开始对偏 W 态纠缠进行连续的检测之前, 第 2.1 小节介绍了如何利用见证算子来检测纠缠, 第 2.2 小节给出了本文设定的场景。

## 1.1 检测真正的三方纠缠

广义的 perfect-W 态<sup>[4]</sup>表示为:  $|W_{p,s}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2+2s}} (|100\rangle + \sqrt{s} e^{i\phi_1} |010\rangle + \sqrt{s+1} e^{i\phi_2} |001\rangle)$ , 其中: s-实数,  $\phi_1$  和  $\phi_2$ -态的相

位。为简单起见, 设  $s=1, \phi_1=\phi_2=0$ , 则写为:

$$|W_{p,1}\rangle = \frac{1}{2} (|100\rangle + |010\rangle + \sqrt{2} |001\rangle) \quad (1)$$

将  $|W_{p,1}\rangle$  记作  $|W_{\sqrt{2}}\rangle$ , 并且称它偏 W 态。本文进一步研究了偏 W 态: 多个观测者连续检测态的纠缠——使用见证算子来实现这一任务。在文献[3]中给出了见证算子的概念, 用于检测态  $\rho$  纠缠的见证算子 W 是满足以下条件的 Hermitian 算子:

$$\text{Tr}[W\rho] \geq 0, \forall \rho \in \text{BS} \quad (2)$$

至少存在一个  $\rho \notin \text{BS}$ 。

其中: BS-所有可分态的集合。对于每一个纠缠态, 都至少存在一个与其相对应的见证算子。W 态(即  $|W\rangle \langle W|$ )的见证算子  $W_w$  有以下形式:

$$W_w = \frac{2}{3} I_3 - |W\rangle \langle W| \quad (3)$$

其中  $|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle)$ 。注意, 见证算子

可以在实验室中通过执行有限数量的相关局部测量来实现。对于偏 W 态, 首先需要验证的是它是否满足式(2)中的条件。从中发现:

$$\text{Tr}[W_w |W_{\sqrt{2}}\rangle \langle W_{\sqrt{2}}|] < 0 \quad (4)$$

可以看出, 见证算子是适用于检测偏 W 态的纠缠。为了更具体三方的测量, 纠缠见证算子  $W_w$ <sup>[5]</sup>可以分解为:

$$W_w = \frac{1}{24} [13|I\rangle \langle I| + 3\sigma_x \otimes |I\rangle \langle I| + 3|I\rangle \langle I| \otimes \sigma_x + 3|I\rangle \langle I| \otimes \sigma_z + 5\sigma_z \otimes \sigma_x \otimes I + 5\sigma_x \otimes |I\rangle \langle I| + 5|I\rangle \langle I| \otimes \sigma_z + 7\sigma_x \otimes \sigma_x \otimes I - |I\rangle \langle I| (\sigma_z + \sigma_x) - |I\rangle \langle I| (\sigma_z + \sigma_x) \otimes I - (\sigma_z + \sigma_x) \otimes |I\rangle \langle I| - |I\rangle \langle I| (\sigma_z + \sigma_x) \otimes (\sigma_z + \sigma_x) - (\sigma_z + \sigma_x) \otimes |I\rangle \langle I| (\sigma_z + \sigma_x) - (\sigma_z + \sigma_x) \otimes (\sigma_z + \sigma_x) \otimes I - (\sigma_z + \sigma_x) \otimes |I\rangle \langle I| (\sigma_z - \sigma_x) - |I\rangle \langle I| (\sigma_z - \sigma_x) \otimes I -$$

$$\begin{aligned}
 & (\sigma_z - \sigma_x) \otimes |0\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 0| \otimes (\sigma_z - \sigma_x) \otimes (\sigma_z - \sigma_x) - (\sigma_z - \sigma_x) \otimes |0\rangle\langle 0| \otimes (\sigma_z - \sigma_x) - (\sigma_z - \sigma_x) \otimes \\
 & (\sigma_z - \sigma_x) \otimes |0\rangle\langle 0| \otimes (\sigma_z - \sigma_x) \otimes (\sigma_z - \sigma_x) - |0\rangle\langle 0| \otimes (\sigma_z + \sigma_y) - |0\rangle\langle 0| \otimes (\sigma_z + \sigma_y) \otimes |0\rangle\langle 0| - \\
 & (\sigma_z + \sigma_y) \otimes |0\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 0| \otimes (\sigma_z + \sigma_y) \otimes (\sigma_z + \sigma_y) - (\sigma_z + \sigma_y) \otimes |0\rangle\langle 0| \otimes (\sigma_z + \sigma_y) - (\sigma_z + \sigma_y) \\
 & \otimes (\sigma_z + \sigma_y) \otimes |0\rangle\langle 0| - (\sigma_z + \sigma_y) \otimes (\sigma_z + \sigma_y) \otimes (\sigma_z + \sigma_y) - |0\rangle\langle 0| \otimes (\sigma_z - \sigma_y) - |0\rangle\langle 0| \otimes (\sigma_z - \\
 & \sigma_y) \otimes |0\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 0| \otimes (\sigma_z - \sigma_y) \otimes (\sigma_z - \sigma_y) - (\sigma_z - \sigma_y) \otimes |0\rangle\langle 0| \otimes (\sigma_z - \sigma_y) - \\
 & (\sigma_z - \sigma_y) \otimes (\sigma_z - \sigma_y) \otimes |0\rangle\langle 0| - (\sigma_z - \sigma_y) \otimes (\sigma_z - \sigma_y) \otimes (\sigma_z - \sigma_y) ] \quad (5)
 \end{aligned}$$

### 1.2 测量场景

在本小节中,详细给出了本文使用的测量场景。考虑一个由三个自旋 1/2 粒子组成的偏 W 态,由空间分离的三方, Alice, Bob 和多个 Charlie (即 Charlie<sup>1</sup>, Charlie<sup>2</sup>, Charlie<sup>3</sup>, ..., Charlie<sup>n</sup>) 共享。这里, Alice 对第一个粒子执行投影测量, Bob 对第二个粒子执行投影测量,允许多个 Charlie 对第三个粒子执行测量[10, 20], 序列中最后一个 Charlie 执行投影测量,其余执行非锐度测量。该场景如图 1 所示。

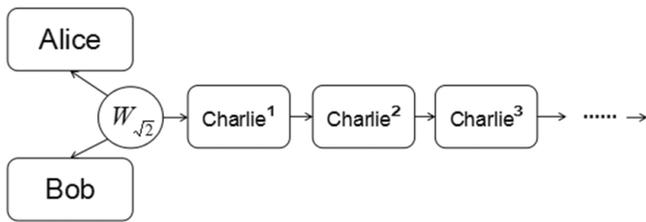


图 1 测量场景

图 1. 偏 W 态纠缠的连续检测: 空间分离的三方, Alice, Bob 和 Charlie<sup>1</sup>, 共享一个三体偏 W 态。Alice 和 Bob 对各自的粒子进行了投影测量, Charlie<sup>1</sup> 对其粒子进行了非锐度测量并把这个粒子发送给 Charlie<sup>2</sup>。Charlie<sup>2</sup> 接收到粒子后, 执行非锐度测量, 并将粒子发送给 Charlie<sup>3</sup>, 如此循环。

从图 1 中我们可以看到, 每个 Charlie 执行的测量是独立不相关的。这意味着每个 Charlie 的所有测量设置都是等可能的。此外, 由于三方在空间上分离, Alice, Bob 和任意 Charlie 之间都满足无信号条件。值得注意的是, 由于所有的 Charlie 对同一粒子进行测量, 不同的 Charlie 之间不满足无信号条件。

出现这样一个问题: 有多少 Charlie 可以连续探测到与一个 Alice 和一个 Bob 的纠缠, 并使用见证算子来找到 Charlie 的最大数量。请注意, 如果序列中的任何 Charlie 执行投射测量, 态将失去纠缠, 并且之后的 Charlie 不能检测到纠缠。最后一个 Charlie 的测量设置没有严格要求 (可以执行投影测量)。因此, 为了序列中的 Charlie 可以检测到纠缠, 前 (n-1) Charlie 执行非锐度测量。

非锐度测量是对系统进行最小的干扰同时获得足够的信息。用两个参数来描述: 质量因子 F 和精度 G。质量因子 F 表示系统在测量过程中保持初始状态的程度。精度 G 表示测量过程中获得的信息。信息获得和干扰权衡由 F<sup>2</sup>+G<sup>2</sup>=1 给出。也就是说, 对于量子系统的二分测量, 满足 F<sup>2</sup>+G<sup>2</sup>=1 的条件意味着在获得一定信息的条件下干扰最小。非锐度测量是一种特殊的 positive operator-valued measurements (即 POVM) [10, 20]。POVM 是一组投影测量, 满足 E = {E<sub>i</sub> | ∑<sub>i</sub>E<sub>i</sub>=I, 0<E<sub>i</sub>≤I}。在这里, 每个算子 E<sub>i</sub> 决

定了第 i 个结果的概率 Tr[ρE<sub>i</sub>], 其中 ρ 是系统中需要测量的态。

为了解释非锐度测量与 POVM 的单个参数之间的关系, 考虑二分可观测量 A=P<sub>+</sub>-P<sub>-</sub>, 其中 P<sub>±</sub>(P<sub>±</sub>) 表示结果为 +1 (-1) 的射影算子。给定一个可观测量 A, 一个二分的非锐度可观测量 A<sup>λ</sup>=E<sub>+</sub><sup>λ</sup>-E<sub>-</sub><sup>λ</sup> 可以与锐度参数 λ (λ ∈ (0, 1]) 关联, 其中 E<sub>+</sub><sup>λ</sup>+E<sub>-</sub><sup>λ</sup>=I, 0<E<sub>±</sub><sup>λ</sup>≤I。这里的算子 E<sub>±</sub><sup>λ</sup> (也称为效应算子) 有以下形式:

$$E_{\pm}^{\lambda} = \lambda P_{\pm} + (1-\lambda) \frac{I}{2} \quad (6)$$

可以看出, 上述结果是通过将投影测量值与噪声混合得到的。同样, 在对 ρ 执行非锐度测量后, 得到 +1 和 -1 的概率分别为 Tr[ρE<sub>+</sub><sup>λ</sup>] 和 Tr[ρE<sub>-</sub><sup>λ</sup>]。然后, 通过转换, 可以发现上面的算子可以写成: E<sub>±</sub><sup>λ</sup> =  $\frac{1+\lambda}{2}$  P<sub>±</sub> +  $\frac{1-\lambda}{2}$  P<sub>∓</sub>。

A<sup>λ</sup> 的期望值定义为 ⟨A<sup>λ</sup>⟩ = Tr[ρE<sub>+</sub><sup>λ</sup>] - Tr[ρE<sub>-</sub><sup>λ</sup>] = Tr[ρ(E<sub>+</sub><sup>λ</sup> - E<sub>-</sub><sup>λ</sup>)] = λ ⟨A⟩, 其中 ⟨A⟩ 是在投影测量下观测量 A 的期望值。注意, ⟨A<sup>λ</sup>⟩ 的值可以估计为在非锐度测量下结果是 ±1 的概率 (Tr[ρE<sub>±</sub><sup>λ</sup>])。这些概率是通过非锐度测量的实验实现。

在任何连续测量方案中, 都可以通过对系统的最小干扰来获得一定的信息。非锐度测量被证明是一个好的选择。而非锐利测量相关的量因子 F 和精度 G 由 F=√(1-λ) 和 G=λ 给出。因此, 对于信息获得和干扰的权衡, 非锐度测量可以在一些干扰的情况下得到最大的信息。在本论文中, 我们将考虑除了由序列中的最后一个执行的投影测量外, 所有的 Charlie 执行非锐度测量的情况。

### 2 偏 W 态的连续检测

让我们考虑式 (1) 中由 Alice, Bob 和 Charlie<sup>1</sup> 最初共享的偏 W 态。当 Alice 和 Bob 执行投影测量, Charlie<sup>1</sup> 执行具有锐度参数 λ<sub>1</sub> 非锐度测量时, 见证算子 W<sub>W</sub><sup>λ<sub>1</sub></sup> 有期望值 Tr[W<sub>W</sub><sup>λ<sub>1</sub></sup> | W<sub>√2</sub>⟩ ⟨W<sub>√2</sub>|] =  $\frac{1}{12}$  [5 - (4√2 + 3)λ<sub>1</sub>]。当 Charlie<sup>1</sup> 可以检测到与 Alice 和 Bob 的纠缠时, 锐度参数 λ<sub>1</sub> >  $\frac{20\sqrt{2}-15}{23} \approx 0.58$ , 即 λ<sub>1</sub> = 0.58 + ε (0 < ε ≤

0.42)。在 Charlie<sup>1</sup> 执行完非锐度测量后, 平均测后态变为 ρ<sub>W<sub>√2</sub></sub><sup>λ<sub>1</sub></sup> =

$$\frac{1}{5} \sum_{i, z_k^1} \langle (|0\rangle\langle 0| \otimes \sqrt{E_{i|z_k^1}^{\lambda_1}}) | W_{\sqrt{2}} \rangle \langle W_{\sqrt{2}} | (|0\rangle\langle 0| \otimes \sqrt{E_{i|z_k^1}^{\lambda_1}}) \rangle,$$

其中 i ∈ {+1, -1}, z<sub>k</sub><sup>1</sup> ∈ {z,  $\frac{z+x}{\sqrt{2}}$ ,  $\frac{z-x}{\sqrt{2}}$ ,  $\frac{z+y}{\sqrt{2}}$ ,  $\frac{z-y}{\sqrt{2}}$ }。为了探索是否有多于一个 Charlie 可以与一个 Alice 和一个 Bob 检测到纠缠, Charlie<sup>2</sup> 需要对测后态检测纠缠。

接着, Charlie<sup>2</sup> 对 Charlie<sup>1</sup> 的粒子执行具有锐度参数 λ<sub>2</sub> 的非锐度测量。用见证算子 W<sub>W</sub><sup>λ<sub>2</sub></sup> 来验证 Alice, Bob, Charlie<sup>2</sup> 之间的纠缠。为了简化操作, 锐度参数 λ<sub>1</sub> 取其最小值 λ<sub>1</sub> = 0.58。因此, 可以得到对具有锐度参数 λ<sub>2</sub> 的见证算子 W<sub>W</sub><sup>λ<sub>2</sub></sup> 的期望值 Tr [W<sub>W</sub><sup>λ<sub>2</sub></sup> ρ<sub>W<sub>√2</sub></sub><sup>λ<sub>1</sub></sup>] =

$0.42-0.63\lambda_2$ 。当  $\text{Tr}[W_W^{\lambda_2, \lambda_1}] < 0$ , (即  $\lambda_2 = 0.67 + \varepsilon$  ( $0 < \varepsilon \leq 0.33$ )),  $\text{Charlie}^2$  可以用见证算子  $[W_W^{\lambda_2}]$  来检测到与 Alice 和 Bob 的纠缠。

在表 1 中, 使用有效的见证算子  $W_W^{\lambda_i}$ , 给出了每个 Charlie 检

表 1 每个 Charlie 锐度参数的允许范围

Charlie <sup>m</sup>	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
Charlie <sup>1</sup>	$\lambda_1 \in (0.58, 1]$			
Charlie <sup>2</sup>	$\lambda_1 = 0.58 + \varepsilon$	$\lambda_2 \in (0.67, 1]$		
Charlie <sup>3</sup>	$\lambda_1 = 0.58 + \varepsilon$	$\lambda_2 = 0.67 + \varepsilon$	$\lambda_3 \in (0.78, 1]$	
Charlie <sup>4</sup>	$\lambda_1 = 0.58 + \varepsilon$	$\lambda_2 = 0.67 + \varepsilon$	$\lambda_3 = 0.78 + \varepsilon$	不存在 ( $\lambda_4 > 1.04$ )

测与 Alice 和 Bob 纠缠的锐度参数的允许范围。当 Charlie<sup>4</sup> 检测到与 Alice 和 Bob 的纠缠时, 它的锐度参数必须满足  $\lambda_4 > 1.04$ , 这与  $\lambda_4 \in (0, 1]$  的条件相悖。我们可以得出这样的结论: 最多有 3 个 Charlie 能够连续探测到与一个 Alice 和一个 Bob 的纠缠。

### 3 总结

本文研究了多个观察者能否连续探测到偏 W 态的纠缠问题。我们考虑了这样一个场景: 空间分离的三方, Alice, Bob 和多个 Charlie 共享偏 W 态。Alice 测量第一个粒子, Bob 测量第二个

粒子, 多个 Charlie 依次测量第三个粒子。采用带锐度参数的见证算子检测纠缠。在这种情况下, 我们已经证明了多达 3 个 Charlie 可以探测到与一个 Alice 和一个 Bob 的纠缠。我们没有找到最合适的目击者算子来顺序检测偏 W 态的纠缠。可以相信, 如果出现更合适的见证算子结果会更好。

### 参考文献

- [1] Ren C, Feng T, Yao D, et al. Passive and active nonlocality sharing for a two-qubit system via weak measurements[J]. Phys. Rev. A, 2019.
- [2] Busch, Paul. Unsharp reality and joint measurements for spin observables[J]. Phys Rev D Part Fields, 1986, 33(8): 2253-2261.
- [3] Maity A G, Das D, Ghosal A, et al. Detection of genuine tripartite entanglement by multiple sequential observers [J]. Physical Review A, 2020, 101(4): 042340.

收稿日期: 2021-01-05

作者简介: 徐璐琳(1995—), 女, 汉族, 山西晋中人, 硕士研究生, 研究方向为代数与密码。

(上接第 266 页)

化能够得到充分的保护和维持, 小镇居民要共同努力, 让小镇成为文化凝聚力, 传播正能量和谐的小镇, 使社会成为一个和谐的社会。

### 5 小结

即墨古城古岬小镇是一个具有独特历史文化和历史积淀的小镇, 特色小镇自身所呈现出的是一种文化特色, 在文化的打造过程中, 又充分体现出自身的特色和内涵, 因此在人类文化的发展过程中成为至关重要的组成部分和最具有创造力的因素。当前随着社会经济的迅猛发展, 人们对物质文明和精神文明有越来越多的需求, 在这样的情况下, 人们更加关注小镇特色文化的打造, 对其进行更科学合理的规划和建设, 不断追求特色发展和独特魅力的体现。小镇人民在全新的时代背景下, 要从小镇的实际情况出发, 深刻挖掘古城的特色资源和文化内涵, 不能局限在近期收益和快速建设的狭隘圈子上, 要具备长远的发展眼光, 贯彻落实可持续发展的先进理念, 从整体上进行相对应的规划和发展, 以此充分体现出小镇的文化特色以及深刻文化内涵, 同时进一步增强其内在的动力和生机活力, 有更加积极向上的发展氛围, 以此通过小镇特色文化的打造, 展现出传统文化的传承和保护, 展望未来传统文化保护与传承, 在以后的发展中, 将即

墨古城小镇古岬的历史文化纳入整体规划是势在必行的趋势。这样的小镇也将获得一个深具特色而又和谐统一的文化小镇, 在新时代多元化发展的背景下将会出现一个全新小镇的繁荣景象。

### 参考文献

- [1] 刘易斯·芒福德. 城市文化[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2009.
- [2] 韩乃桂. 即墨县志[M]. 北京: 新华出版社, 1971.
- [3] 逢建斌, 杨吉华, 迟海娇. 基于红色文化与临沂岱崮镇规划关系及发展对策探讨[J]. 建筑工程技术与设计, 2018(7): 48, 1330.
- [4] 潘谷西. 中国建筑史[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2008.

本文系 2020 年度山东省艺术科学重点课题“胶东即墨古城特色城镇文化可持续发展研究”(ZD202008640) 成果之一; 本文系 2020 年度山东省艺术科学重点课题“蓬莱传统八仙纹样保护传承研究”(ZD202008431) 成果之一。

收稿日期: 2021-01-04

作者简介: 逢建斌(1981—), 男, 汉族, 山东青岛人, 副教授, 硕士研究生, 从事建筑环境设计方向研究工作。