# 双论域粗糙集的相关拓扑

张嘉轩[1],杨凌云[2]

(1.江苏师范大学敬文书院,江苏 徐州 221116;2.江苏师范大学数学与统计学院,江苏 徐州 221116)

**摘 要**:粗糙集理论是处理不精确、不确定与不完全信息的一个有力的数学工具,在人工智能、模式识别以及决策支持与分析等众多领域都得到广泛的应用和研究。双论域粗糙集模型是将经典的Pawlak粗糙集模型推广到两个不同但相关的论域上。本文将拓扑方法引入双论域粗糙集模型的研究中,利用拓扑基、子基和序这几个工具在双论域粗糙集模型的一个论域上建立了多个拓扑结构,并讨论了这些拓扑之间的关系。

**关键词**:双论域粗糙集;拓扑;基;子基;预序

**中图分类号**:O159 **文献标识码**:A **文章编号**:1004-7344(2021)19-0311-02

不确定的、模糊的现象在现实生活和生产的各个领域中都大量存在,粗糙集理论正是为了处理这些不确定的现象应用而生的一种数学工具。自产生以来,它受到国内外许多信息科学工作者和数学工作者的关注,无论是理论还是应用方面,都取得长足的发展。随着计算机科学与信息科学的飞速发展,有关它们的数学基础的研究越来越受到人们的关注和重视,已经成为数学工作者、计算机科学和信息科学工作者共同感兴趣的领域.粗糙集理论正是这样的一个交叉领域,它是数据分析和知识处理中的一个强有力的数学工具。

作为数学中最重要的主题之一,拓扑也为粗糙集的研究提供了数学工具和一些有趣的研究课题,众多中外学者研究了单论域粗糙集与拓扑相关的性质,得到许多有意义的结果.本文讨论双论域粗糙集的相关拓扑。

## 1 预备知识

### 1.1 双论域粗糙集

本文中的论域都不要求是有限的。

定义1[1,2]:设U,V是两个非空论域,R是从U到V的一个二元关系,即 $R\subseteq U\times V$,则称三元组(U,V,R)是一个双论域近似空间。

对于一个从U到V的二元关系R及任意的 $x\in U$,$y\in V$,记:

$R(x)=\{y\in V|xRy\}$,$R^{-1}(y)=\{x\in U|xRy\}$。

定义2[2]:设(U,V,R)是一个双论域近似空间,$x\in U$,若 $R(x)=\emptyset$,称x是相对于R的一个孤立元。

定义3[2]:设(U,V,R)是一个双论域近似空间,对任意的 $X\subseteq V$,定义X的上近似集和下近似集如下:

$\underline{R}(X)=\{x\in U|R(x)\subseteq X\}$

$\overline{R}(X)=\{x\in U|R(x)\cap X\neq\emptyset\}$

称($\underline{R}(X)$,$\overline{R}(X)$)为粗糙集。

### 1.2 拓扑空间

定义4[3]:设X是一个集合,X的子集族T称为X上的一个拓扑,若T满足:

(1)$X,\emptyset\in T$。

(2)若 $A,B\in T$,则 $A\cap B\in T$。

(3)若 $T_1\subset T$,则 $\cup T_1\in T$。

并称(X,T)是一个拓扑空间。

定义5[3]:(X,T)是一个拓扑空间,$B\subseteq T$,若对每一个 $U\in T$,都存在 $B_1\subset B$ 使得 $U=\cup_{B\subset B_1}B$,则称B是拓扑T的一个基。

引理1[3]:设X是一个集合,B是X的子集族,如果条件:

(1)$\cup B=X$。

(2)若 $B_1,B_2\in B$,则对任意的 $x\in B_1\cap B_2$,存在 $B\in B$ 使 $x\in B\subset B_1\cap B_2$。

都成立,则在X上存在唯一的以B为基的拓扑。

定义6[3]:(X,T)是一个拓扑空间,$S\subseteq T$,若:

$\{S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n|S_i\in S,i=1,2,\cdots,n;n\in N\}$

是T的一个基,则称S为拓扑T的一个子基,或者称S为拓扑空间X的一个子基。

引理2[3]:设S为非空集合X的子集族,若 $X=\cup S$,则存在X的唯一的拓扑以S为子基。

## 2 双论域粗糙集模型上的几个拓扑

定理1:设(U,V,R)是一个没有孤立元的双论域近似空间,令 $S=\{R^{-1}(y)|y\in V\}$,则S是集合U上的一个拓扑子基。

证明因为(U,V,R)没有孤立元,所以对任意的 $x\in U$,存在 $y\in V$ 使得xRy,即 $x\in R^{-1}(y)$,因此:

$U=\cup S$

由引理2得,S是集合U上的一个拓扑子基。

我们将U上以S为子基的拓扑记为 $T_S$。

定理2:设(U,V,R)是一个没有孤立元的双论域近似空间,对每一个子集 $B\subseteq V$,记:

$\omega(B)=\cap\{R^{-1}(y)|y\in B\}$

再令:

$\mathcal{B}=\{\omega(B)|B\subseteq V\}$

则 $\mathcal{B}$ 是 U 上某个拓扑的基。

证明由于 $\cup\mathcal{B}=U$ 且对任意的 $B_1,B_2\subseteq V$，有：

$\omega(B_1)\cap\omega(B_2)=\omega(B_1\cup B_2)\in\mathcal{B}$

根据引理 1 得，$\mathcal{B}$ 是 U 上某个拓扑的基。

我们将 U 上以 $\mathcal{B}$ 为基的拓扑记为 $T_B$。

设 X 是一个非空集合，≤是 X 上的一个二元关系。若对任意的 $x\in X$，都有 $x\leqslant x$，则称≤是自反的；若对任意的 $x,y,z\in X$，由 $x\leqslant y$ 且 $y\leqslant z$ 可推得 $x\leqslant z$，则称≤是传递的；若≤既是自反的又是传递的，则称≤是 X 上的一个预序。设≤是 X 上的一个预序，$A\subseteq X$，令：

$\downarrow A=\{y\in X|存在\ x\in A\ 使得\ y\leqslant x\}$

$\uparrow A=\{y\in X|存在\ x\in A\ 使得\ x\leqslant y\}$

若 $\uparrow A=A$，则称 A 关于≤是一个上集。对于一个单点集 $\{x\}\subseteq X$，我们用 $\downarrow x$ 来表示 $\downarrow\{x\}$，用 $\uparrow x$ 来表示 $\uparrow\{x\}$。容易看出：

$\uparrow A=\cup\{\uparrow x|x\in A\}$

$\downarrow A=\cup\{\downarrow x|x\in A\}$

设 (U，V，R) 是一个双论域近似空间，定义论域 U 上的一个二元关系≤：对任意的 $x_1,x_2\in U$。

$x_1\leqslant x_2\Leftrightarrow R(x_1)\subseteq R(x_2)$

易见，≤是 U 上的预序。于是，由文献[4]知，≤诱导出 U 上的两个拓扑 $T_{\leqslant}^{1}$ 和 $T_{\leqslant}^{2}$，其中：

$T_{\leqslant}^{1}=\{A\subseteq U|A\ 关于\leqslant是上集\}$。

$T_{\leqslant}^{2}$ 以 $S_1=\{U\backslash\downarrow x|x\in U\}$ 为子基。

至此，对于一个没有孤立元的双论域粗糙集模型 (U，V，R)，我们构造了四个拓扑，如图 1 所示。

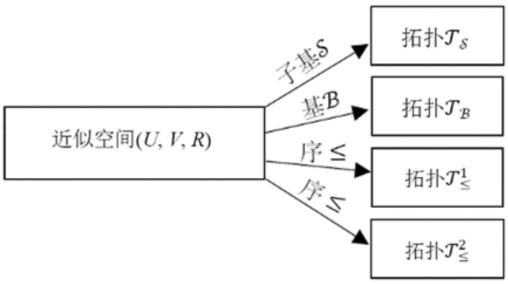


图 1 近似空间生成的拓扑

下面我们讨论这四个拓扑之间的关系。

定理 3：设 (U，V，R) 是一个没有孤立元的双论域近似空间，则 $T_S\subseteq T_B$。

证明因为：

$\mathcal{S}=\{R^{-1}(y)\,y\in V\}=\{\omega(\{y\})|y\in V\}\subseteq\mathcal{B}$

所以 $T_S\subseteq T_B$。

定理 4：设 (U，V，R) 是一个没有孤立元的双论域近似空间，则 $T_{\leqslant}^{2}\subseteq T_S$。

证明对任意的 $x\in U$，有：

$U\downarrow x=\{u\in U|u\nless x\}=\{u\in U|R\ (u)\nsubseteq R\ (x)\}=\{u\in U|存在\ v\in R(u)/R(x)\}=\cup\{R^{-1}(y)|y\in V\backslash R(x)\}\in T_S$

所以 $S_1\subseteq T_S$，从而 $T_{\leqslant}^{2}\subseteq T_S$。

定理 5：设 (U，V，R) 是一个没有孤立元的双论域近似空间，则 $T_B=T_{\leqslant}^{1}$。

证明先证 $T_B\subseteq T_{\leqslant}^{1}$。设 $A\in\mathcal{B}$，则存在 $B\subseteq V$ 使得 $A=\omega(B)=\cap\{R^{-1}(y)|y\in B\}$。下证 A 关于≤是上集：设 $x_1\in A$ 且 $x_1\leqslant x_2$，则 $R(x_1)\subseteq R(x_2)$。对任意的 $y\in B$，有 $x_1\in R^{-1}(y)$，故 $y\in R(x_1)$，从而 $y\in R(x_2)$，故 $x_2\in R^{-1}(y)$，于是：

$x_2\in\cap\{R^{-1}(y)|y\in B\}=A$

所以 A 关于≤是上集，即 $A\in T_{\leqslant}^{1}$，从而 $\mathcal{B}\subseteq T_{\leqslant}^{1}$，于是 $T_B\subseteq T_{\leqslant}^{1}$。

再证 $T_{\leqslant}^{1}\subseteq T_B$。设 $A\in T_{\leqslant}^{1}$，则 A 关于≤是上集，即 $A=\uparrow A=\cup\{\uparrow x|x\in A\}$。下证 $\uparrow x=\omega(R(x))$。设 $x_1\in\uparrow x$，则 $x\leqslant x_1$，即 $R(x)\subseteq R(x_1)$。则对任意的 $y\in R(x)$，有 $y\in R(x_1)$，则 $x_1\in R^{-1}(y)$，故 $x_1\in\omega(R(x))$，从而 $\uparrow x\subseteq\omega(R(x))$。另一方面，设 $x_1\in\omega(R(x))=\cap\{R^{-1}(y)|y\in R(x)\}$，则对任意的 $y\in R(x)$，有 $x_1\in R^{-1}(y)$，从而 $y\in R(x_1)$，于是 $R(x)\subseteq R(x_1)$，即 $x\leqslant x_1$，亦即 $x_1\in\uparrow x$，从而 $\omega(R(x))\subseteq\uparrow x$，所以 $\uparrow x=\omega(R(x))$。A 可以写成 $\mathcal{B}$ 中若干成员的并，故 $A\in T_B$。

综合上述两个方面得，$T_B=T_{\leqslant}^{1}$。

定理 5 表明，虽然是以不同的方式进行定义的，但 $T_B$ 与 $T_{\leqslant}^{1}$ 事实上是论域 U 上的同一个拓扑。

综上，按上述四种方式构造的论域 U 上的拓扑之间的大小关系见图 2。

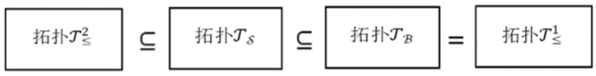


图 2 几个拓扑之间的关系

## 3 结语

本文在双论域粗糙集模型的一个论域上构造了四个拓扑，讨论了这四个拓扑之间的关系，同样地，另一个论域上也存在相应的几个拓扑。本文初步建立起双论域粗糙集与拓扑之间的联系，进一步地还可以定义双论域粗糙集的若干拓扑性质，并探究拓扑性质在双论域粗糙集属性约简中的应用。

### 参考文献

[1] 杨海龙.双论域粗糙集理论与方法[M].北京：科学出版社，2016.

[2] PEI D W, XU Z B. Rough set models on two universes[J]. International Journal of General Systems, 2004, 35(5): 569–581.

[3] 熊金城.点集拓扑讲义(第五版)[M].北京：高等教育出版社，2020.

[4] G. Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, et al. Continuous Lattices and Domains [M]. London: Cambridge University Press, 2003.

**基金项目**：2019 年江苏省大学生创新创业训练计划项目“双论域粗糙集模型的拓扑性质及其在属性约简中的应用”(201910320131Y)。

**收稿日期**：2021-04-01

**作者简介**：张嘉轩(1998—)，女，汉族，江苏徐州人，本科，研究方向为数学与应用数学。

**通讯作者**：杨凌云(1973—)，女，汉族，江苏灌云人，博士，副教授，研究方向为拓扑学、粗糙集理论。