# 关于指对同构思想的一点思考

晏廷凤

（曲靖市教育科学研究所，云南 曲靖 655000）

**摘　要**：纵观近几年各省市高考模拟压轴题，指对同构的好题不胜枚举，同构解题，谁与争锋，它们像一颗颗璀璨的珍珠在数学题海中闪闪发光。导数问题中经常出现含参等式或不等式的恒成立问题，通过合理变形，使左右两边结构形式完全相同，能找到式子两边对应的同一函数模型，这就是同构法。为了降低思维难度和减少繁杂的计算，以运用指对同构法解决导数题为例，探讨指对同构的思想方法，以期能使复杂问题简单化，简化解题思路，可起到事半功倍的效果。

**关键词**：指对同构；导数；恒成立

**中图分类号**：G634.6　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1004-7344(2023)12-0034-03

## 1 对同构思想的思考

“同构式”指“结构相同的式子”[1]，是指除了变量不同，其余结构均相同的方程或不等式[2]。同构思想通过合理变形，得到两个相同结构的式子，在利用不等式处理函数的求值或不等式恒成立问题中，有一部分试题是命题者利用函数单调性构造出来的，再利用单调性解方程或者比较大小[3]，同构的思想方法常常应用到高考压轴题的导数综合性问题中。如果能找到不等式两边对应的同一函数，无疑会大大简化解题过程，如 $F(x)\geqslant0$ 能变形为 $f(g(x))\geqslant f(h(x))$，再利用 $f(x)$ 的单调性，如果单调递增，则 $g(x)\geqslant h(x)$，这种方法称为同构方法[4]。

## 2 针对题型及解决方案

主要针对指数和对数混合的导数问题，这类题型主要出现在解答题的压轴位置，如果函数结构中同时包含对数式和指数式，通过适当的指对变形、配凑，调整不等式结构，转化为积型、商型、和差型 3 个同构基本型，同构为同一个函数，即得到两个相同结构的式子，利用同构函数的单调性，再把复杂的不等式转化为简单的不等式，问题将会迎刃而解[5]。

## 3 常见的指对变形

常见的指对变形如式(1)所示。

$$x^{ex}=e^{x+\ln x};\ \frac{e^x}{x}=e^{x-\ln x};\ \frac{x}{e^x}=e^{\ln x-x};\ x+\ln x=\ln(xe^x);\ x-\ln x=\ln\left(\frac{e^x}{x}\right)。\quad(1)$$

以上这些变形近几年十分流行，对解决指对混合不等式问题，例如，恒成立求参数取值范围，或证明不等式，都带来了极大的便利。当然，在具体使用中，往往要结合切线的放缩或换元法。可以说掌握了这些变形及常见切线型不等式，就大大降低了这类题的难度，能避免复杂的计算与推理，大大简化解题过程。

## 4 指对同构的 3 种模型(积型、商型、和差型)

(1)积型模型如式(2)所示。

$$ae^a<b\ln b\Rightarrow\begin{cases}\text{同左}：ae^a<(\ln b)e^{\ln b}\rightarrow f(x)=xe^x\\ \text{同右}：e^a\ln e^a<b\ln b\rightarrow f(x)=x\ln x\\ \text{取对数}：a+\ln a<\ln b+\ln(\ln b)\rightarrow f(x)=x+\ln x\end{cases}。\quad(2)$$

(2)商型模型如式(3)所示。

$$\frac{e^a}{a}<\frac{b}{\ln b}\Rightarrow\begin{cases}\text{同左}：\frac{e^a}{a}<\frac{e^{\ln b}}{\ln b}\rightarrow f(x)=\frac{e^x}{x}\\ \text{同右}：\frac{e^a}{\ln e^a}<\frac{b}{\ln b}\rightarrow f(x)=\frac{x}{\ln x}\\ \text{取对数}：a-\ln a<\ln b-\ln(\ln b)\rightarrow f(x)=x-\ln x\end{cases}。\quad(3)$$

(3)和差型如式(4)所示。

$$e^a\pm a>b\pm\ln b\Rightarrow\begin{cases}\text{同左}：e^a\pm a>e^{\ln b}\pm\ln b\rightarrow f(x)=e^x\pm x\\ \text{同右}：e^a\pm\ln e^a>b\pm\ln b\rightarrow f(x)=x\pm\ln x\end{cases}。\quad(4)$$

## 5 同构方法在经典例题中的应用

### 5.1 利用同构思想求参数的取值范围

例 1：(2020 全国新高考)已知函数 $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$。

(1)当 $a=e$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积。

(2)若 $f(x)\geqslant1$，求 $a$ 的取值范围。

解析：(1)当 $a=e$ 时，$f(x)=e^x-\ln x+1$，有 $f'(x)=e^x-\frac{1}{x}$ 所以 $k=f'(1)=e-1$。

因为 $f(1)=e+1$，从而知道切点坐标为 $(1,e+1)$，所以函数 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-(e+1)=(e-1)(x-1)$，即 $y=(e-1)x+2$。

所以切线与坐标轴的交点坐标分别为 $(0,2)$，$\left(-\frac{2}{e-1},0\right)$。

所以所求三角形的面积为 $S=\frac{1}{2}\times2\times\left|\frac{-2}{e-1}\right|=\frac{2}{e-1}$。

(2)由 $f(x)\geqslant1$ 可得式(5)。

$e^{\ln a+x-1}+\ln a+x-1\geqslant x+\ln x$。 (5)

构造 $g(x)=x+e^x$,显然函数 $g(x)=x+e^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递增的函数。

由 $e^{\ln a+x-1}+\ln a+x-1\geqslant x+\ln x$ 有 $g(\ln a+x-1)\geqslant g(\ln x)$,又函数 $g(x)=x+e^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $\ln a+x-1\geqslant\ln x$,故 $\ln a\geqslant(\ln x-x+1)_{max}$,令 $h(x)=\ln x-x+1$,则 $h'(x)=\frac{1}{x}-1(x>0)$,所以当 $x\in(0,1)$ 时,$h'(x)>0$,函数 $h(x)=\ln x-x+1$ 在 $(0,1)$ 上是单调递增的,当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$h'(x)<0$,函数 $h(x)=\ln x-x+1$ 在 $(1,+\infty)$ 上是单调递减的,所以 $h(x)_{max}=h(1)=1$,故 $a\geqslant1$。所以 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$。

例 2:对任意 $x\in(0,+\infty)$,不等式 $a(e^{ax}+1)\geqslant2(x+\frac{1}{x})\ln x$ 恒成立,求实数 a 的取值范围。

解析:不等式 $a(e^{ax}+1)\geqslant2(x+\frac{1}{x})\ln x$ 的两边同乘以 x,得 $ax(e^{ax}+1)\geqslant(x^2+1)\ln x^2$,构造 $f(x)=x(e^x+1)$,显然 $f(x)=x(e^x+1)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递增的函数,所以由 $ax(e^{ax}+1)\geqslant(x^2+1)\ln x^2$ 有 $f(ax)\geqslant f(\ln x^2)$,又 $f(x)=x(e^x+1)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递增的函数,所以 $\frac{a}{2}\geqslant(\frac{\ln x}{x})_{max}$,令 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$,则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,所以当 $x\in(0,e)$ 时,$g'(x)>0$,函数 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$ 在 $(0,e)$ 上是单调递增的,当 $x\in(e,+\infty)$ 时,$g'(x)<0$,函数 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$ 在 $(0,e)$ 上是单调递减的,所以 $g(x)_{max}=\frac{1}{e}$,故 $a\geqslant\frac{2}{e}$。

例 3:(曲靖市第二中学高三上期中考试)已知函数 $f(x)=(x+\frac{1}{x})\ln x-ax,a>0$。

(1)若 a=2,求函数 f(x)的单调区间。

(2)设 $g(x)=e^{ax}-ax^2+ax$,当 $x>0$ 时,$2f(x)-g'(x)\leqslant0$,求 a 的取值范围.

解析:(1) 当 a=2 时,$f(x)=(x+\frac{1}{x})\ln x-2x$,$f'(x)=\ln x-\frac{\ln x}{x^2}-1+\frac{1}{x^2}=(1-\frac{1}{x^2})(\ln x-1)$,令 $f'(x)=0$,得 x=1 或 x=e,当 $0<x<1$ 或 $x>e$ 时,$f'(x)>0$,当 $1<x<e$ 时,$f'(x)<0$,所以 f(x)的单调递增区间为 $(0,1)$,$(e+\infty)$,单调递减区间为 $(1,e)$。

(2)设 $g'(x)=a(e^{ax}-2x+1)$,因为 $2f(x)-g'(x)\leqslant0$,则 $2(x+\frac{1}{x})\ln x-2ax-a(e^{ax}-2x+1)\leqslant0$,即 $2(x^2+1)\ln x\leqslant ax(e^{ax}+1)$,即 $(x^2+1)\ln x^2\leqslant(e^{ax}+1)\ln e^{ax}$;设 $h(x)=(x+1)\ln x$,则可得 $h(e^{ax})\geqslant h(x^2)$,因为 $h'(x)=\ln x+\frac{1}{x}+1$,则设 $u(x)=\ln x+\frac{1}{x}+1$,$u'(x)=\frac{x-1}{x^2}$。

当 $0<x<1$ 时,$u'(x)<0$,当 $x>1$ 时,$u'(x)>0$,所以函数 u(x)在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,所以 $u(x)\geqslant u(1)=2$,即 $h'(x)\geqslant h'(1)=2$,则函数 $h(x)=(x+1)\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,则由 $h(e^{ax})\geqslant h(x^2)$,得 $e^{ax}\geqslant x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,即 $ax\geqslant2\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立。

即 $a\geqslant\frac{2\ln x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,设 $k(x)=\frac{2\ln x}{x}$,$k'(x)=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$,当 $0<x<e$ 时,$k'(x)>0$,当 $x>e$ 时,$k'(x)<0$,所以函数 k(x)在 $(0,e)$ 上单调递增,在 $(e,+\infty)$ 上单调递减,所以 $k(x)\leqslant k(e)=\frac{2}{e}$,故 $a\geqslant\frac{2}{e}$。

例 4:已知函数 $f(x)=ae^x\ln x(a>0)$,$g(x)=x^2+x\ln a$。

(1)讨论函数 f(x)的单调性。

(2)设函数 $h(x)=g(x)-f(x)$,若 $h(x)>0$ 对任意的 $x\in(0,1)$ 恒成立,求实数 a 的取值范围。

解析:(1)函数当 $f(x)=ae^x\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$ 时,$f'(x)=ae^x(\ln x+\frac{1}{x})$,令 $m(x)=\ln x+\frac{1}{x}(x>0)$,则 $m'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$,当 $x\in(0,1)$ 时,$m'(x)<0$,m(x)单调递减;当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$m'(x)>0$,m(x)单调递增;所以 $m(x)\geqslant m(1)=1>0$,又因为 $a>0$,$e^x>0$,所以 $f'(x)=ae^x(\ln x+\frac{1}{x})>0$,故 f(x)在 $(0,+\infty)$ 上单调递增。

(2)由题意可知:$ae^x\ln x=e^{x+\ln a}\ln x<x^2+x\ln a=x(x+\ln a)$。

所以 $\frac{\ln x}{x}<\frac{x+\ln a}{e^{x+\ln a}}$,令 $H(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$,则 $H'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,当 $x\in(0,e)$ 时,$H'(x)>0$,H(x)单调递增;当 $x\in(e,+\infty)$ 时,$H'(x)<0$,H(x)单调递减,当 $0<ae^x<1$ 时,由 H(x)在 $(0,1)$ 单调递增可知,$\frac{\ln x}{x}<\frac{x+\ln a}{e^{x+\ln a}}$ 对任意 $x\in(0,1)$ 恒成立等价于 $x<ae^x$ 对任意 $x\in(0,1)$ 恒成立;当 $ae^x\geqslant1$ 时,$H(ax^2)\geqslant0$,又 $x\in(0,1)$ 时,$H(x)<0$,所以 $H(x)<H(ax^2)$ 对任意 $x\in(0,1)$ 恒成立。令 $p(x)=\frac{x}{e^x}$,$x\in(0,1)$,则 $p'(x)=\frac{1-x}{e^x}>0$,$x\in(0,1)$,所以 $p(x)=\frac{x}{e^x}$ 在

(0,1)上单调递增,$p(x)<p(1)=\frac{1}{e}$,所以 $a\geqslant\frac{1}{e}$。综上,实数的取值范围为$[\frac{1}{e},+\infty)$。

### 5.2 利用同构思想判断单调性及求参数的值

例 5:已知函数 $f(x)=xe^{-ax}-\ln x+ax-1(a\in R)$,其中 e 为自然对数的底数。

(1)当 a=0 时,求函数 f(x)的最值。

(2)若当 x>0 时,函数 $y=xe^{-ax}$ 的图像与 y=1 的图像有交点,求 a 的最大值。

(3)若 f(x)的最小值为 0,求 a 的最大值。

解析:(1) 当 a=0 时,$f(x)=x-\ln x-1$,$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x}$,所以 $x\in(1,+\infty)$时,$f'(x)>0$,f(x)单调递增;$x\in(0,1)$时,$f'(x)<0$,f(x)单调递减,所以 $f(x)_{min}=f(1)=0$。

(2)由题得方程 $xe^{-ax}=1$ 有正实数解,两边取对数,得 $\ln x-ax=0$,所以 $a=\frac{\ln x}{x}$,令 $F(x)=\frac{\ln x}{x}$,则 $F'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,当 $x\in(e,\infty)$时,$F'(x)<0$,F(x)单调递减;$x\in(0,e)$时,$F'(x)>0$,F(x)单调递增,所以 $F(x)_{max}=F(e)=\frac{1}{e}$,所以 a 的最大值为$\frac{1}{e}$。

(3)由题意得 $f(x)\geqslant0$,且能取等号,即 $xe^{-ax}-\ln x+ax-1\geqslant0$ 且能取等号,令 $t=xe^{-ax}(t>0)$,两边取对数,得 $\ln(xe^{-ax})=-ax+\ln x=\ln t$,所以 $f(x)=xe^{-ax}-\ln x+ax-1=t-\ln t-1\geqslant0$ 恒成立,且等号成立,由(1)可知 $f(x)=g(t)=t-\ln t-1\geqslant g(1)=0$,且 t=1 时等号成立,即 $t=xe^{-ax}=1$ 时,$xe^{-ax}-\ln x+ax-1=0\geqslant0$,且等号成立,即 $xe^{-ax}=1$ 有正实数解,两边取对数,得 $\ln x-ax=0$,所以 $a=\frac{\ln x}{x}$,令 $F(x)=\frac{\ln x}{x}$,则 $F'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,当 $x\in(e,+\infty)$时,$F'(x)<0$,F(x)单调递减;$x\in(0,e)$时,$F'(x)>0$,F(x)单调递增,所以 $F(x)_{max}=F(e)=\frac{1}{e}$,所以 a 的最大值为$\frac{1}{e}$。

### 5.3 利用同构思想处理导数问题中的零点问题

例 6:(2022 年高考甲卷)已知函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}-\ln x+x-a$。

(1)若 $f(x)\geqslant0$,求 a 的取值范围。

(2)证明:若 f(x)有两个零点 $x_1,x_2$,则 $x_1x_2<1$。

解析:(1) $\frac{e^x}{x}-\ln x+x-a\geqslant0\Leftrightarrow e^{x-\ln x}+x-\ln x-a\geqslant0$,令 $t=x-\ln x$,则 $t'=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$,所以 t 在$(1,+\infty)$上单调递增,在(0,1)上单调递减,所以 $t\geqslant1$,又因为 $(e^t+t)_{min}\geqslant a$,$(t\geqslant1)$,故 $a\leqslant e+1$。

(2)因为 f(x)有两个零点 $x_1,x_2$,则等价于 $t=x-\ln x$ 有 2 个不同的解 $x_1,x_2$,故$\begin{cases}t=x_1-\ln x_1\\t=x_2-\ln x_2\end{cases}$,所以 $x_1-\ln x_1=x_2-\ln x_2$,则 $1=\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}$,由对数平均不等式 $\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}$ 可得 $1=\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}>\sqrt{x_1x_2}$,故 $x_1x_2<1$。

## 6 结语

同构法构造函数是高中数学解题的一种常见方法,在解题实践过程中,若能通过观察、分析、整理等变形手段,看清题中函数结构的共性或等式(或不等式)两侧同构,则可轻松构造函数,巧妙利用函数单调性解题。指数和对数混合的导数题,许多情况下,需要凑出同构的形式来,因为指数和对数之间可以互相转换,尽量转换为常见的积型、商型、和差型 3 种同构形式。利用同构思想方法构造函数的基本策略与流程是:"不等式同解变形,左右形式相当;一边一个变量,取左或取右,构造合适的函数"。新高考形势下试题重视数学本质,突出理性思维、数学应用、数学探究、数学文化的引领作用,突出学生对关键能力的考查,要求学生理解准,速度快,思维强,才能拿高分。因此平常要培养学生善于总结方法,不断提高学生的创新能力、转化化归的能力,突出逻辑推理、数学抽象、数学运算等核心素养。以上几个经典例题充分体现了"同构"思想在解决导数综合题中发挥着不可估量的作用。同构思想是解答数学题的一种常用方法与技巧,特别是在解决压轴选择题、填空题、压轴解答题时发挥着奇特功效。在教学中要以熟练技能、方法为目标,加强这方面的训练,可以拓宽学生的思维,把抽象问题直观化,用直观函数的特征、性质,建立问题中的不等关系,以提高解题的能力和速度。

### 参考文献

[1] 李文东,王恒亮.利用同构式巧解数学问题[J].高中数学教与学,2019(13):4-6.

[2] 李子豪.高考总复习讲义-高考调研[M].天津:天津人民出版社,2022:3-5.

[3] 章建跃,李增沪.普通高中教科书-数学[M].北京:人民教育出版社,2021:7-10.

[4] 梁红.解题达人[M].陕西:陕西科学技术出版社,2023:3,6.

[5] 杨瑞强."端点效应"破解不等式恒成立问题[J].中学数学教学,2019(6):33-35.

**作者简介:**晏廷凤(1978— ),男,汉族,云南宣威人,本科,一级教师,主要从事教育教学工作。